



2009 ei ole tylsä vuosi

Matti Lehtinen

Helsingin yliopisto

Maailmassa pidetään joka vuosi satoja matematiikkakilpailuja ja niissä esitettävien tehtävien lukumäärä lie-
nee tuhansissa. Kun kilpailutehtävät saisivat mielellään
olla jotenkin uusia ja ennen näkemättömiä, ei ole ihme,
että laatijoille tulee aika usein mieleen istuttaa tehtä-
vään vuosiluku, päivämäärä tai kilpailun järjestysluku.
Istutus on joskus hiukan keinotekoista: vuosiluvun tilal-
la saattaisi olla vaikkapa ”mielivaltainen, aika suuri ko-
konaisluku n ”. Toisinaan tehtävässä tulee aidosti käyt-
töön jokin luvun matemaattinen ominaisuus. Kilpailu-
matematiikan harrastaja katsookin jo valmiiksi esimer-
kiksi vuosiluvun jaollisuusominaisuudet.

Seuraavassa esitetään pieni valikoima tämän vuoden
tehtäviä eri maista. Yhden tehtävän muotoilusta ei löy-
dy lukua 2009, mutta vihjeeksi voi sanoa, että 2009
on tehtävässä mukana kuitenkin. Kun seuraavan ker-
ran vapaa-ajan ongelmat käyvät päällesi ja viihde-
teollisuus on valmiina niitä omalla tavallaan lievität-
ämään, niin kokeilepa ratkaista näitä. Lähetä rat-
kaisujasi (yhteen tai useampaan tehtävään) vuoden
2009 aikana esimerkiksi suoraan Solmun päätoimitta-
jalle, postissa osoitteeseen Matti Lehtinen, Taskilan-
tie 30 A, 90580 Oulu, tai sähköpostilla osoitteeseen
matti.lehtinen@helsinki.fi. Solmu julkaisee par-
haat ratkaisut, joten palkintona on ainakin mainetta
ja kunniaa. – Ratkaisuja saavat lähettää kaikenikäiset.

Ja sitten tehtäviin:

1. Olkoon $A = \underbrace{999 \dots 9}_{2009 \text{ kpl}}$ ja $B = \underbrace{444 \dots 4}_{2009 \text{ kpl}}$ ja olkoon

$C = A \cdot B$. Määritä luvun C numeroiden summa.
(Kolumbian matematiikkaolympialaiset, 6. ja 7. luokan
tehtävä.)

2. Määritä kaikki positiiviset kokonaislukuparit (m, n) ,
jotka toteuttavat yhtälön

$$mn^2 = 2009(n+1).$$

(Ukrainan matematiikkaolympialaiset, 7. luokan tehtä-
vä.)

3. a) Lukujen 1, 2, ..., 2009 neliöt kirjoitetaan peräk-
kain satunnaisessa järjestyksessä yhdeksi luvuksi. Voi-
ko syntynyt luku olla neliöluku? b) Luvut 1, 2, ..., 2009
kirjoitetaan peräkkäin satunnaisessa järjestyksessä yh-
deksi luvuksi. Voiko tämä luku olla neliöluku? (Ukrai-
nan matematiikkaolympialaiset, 8. luokan tehtävä.)

4. Tarkastellaan 2009×2009 :stä yksikköneliöstä koos-
tuvaa neliöruudukkoa. A ja B pelaavat seuraavaa peliä:
kumpikin värittää vuorollaan yhden yksikköneliön yh-
den sivun keltaiseksi. Pelaaja, joka ensimmäiseksi on-
nistuu värittämään jonkin neliön viimeisen värittämät-
tömän sivun keltaiseksi, voittaa pelin. A aloittaa. Onko
jommallakummalla pelaajalla voittostrategia, ts. voiko
hän valita väritettävät sivunsa niin, että voittaa pe-
lin riippumatta siitä, miten toinen pelaaja on valinnut
väritettävät sivut? (Ukrainan matematiikkaolympialai-
set, 8. luokan tehtävä.)

5. Oppilaalla on 7 paperinpala. Hän valitsee niistä joi-
takain ja pilkkoo nämä seitsemään palaan kunkin. Sitten
hän valitsee taas joitakin paperinpaloistaan ja pilkkoo

jokaisen niistä seitsemään osaan. Voiko hän tätä jatkaen päästä tilanteeseen, jossa hänellä on 2009 paperinpala? (Kreikan matematiikkakilpailu, juniorisarja.)

6. Määritä kaikki positiivisista kokonaisluvusta muodostuvat kolmikot (x, y, z) , joille $99x + 100y + 101z = 2009$. (Viron matematiikkaolympialaiset, 10. luokan tehtävä.)

7. Määritä sellaiset kokonaisluvut a ja b , että $\sqrt{2010 + 2\sqrt{2009}}$ on yhtälön $x^2 + ax + b = 0$ ratkaisu. Osoita, että tällöin $\sqrt{2010 - 2\sqrt{2009}}$ ei ole yhtälön ratkaisu. (Slovenian matematiikkaolympialaiset, 10. luokan tehtävä.)

8. Määritä ne positiiviset kokonaisluvut n , joille $-\frac{53}{2009} < 53 - n$. (Slovenian 53. matematiikkaolympialaiset, 10. luokan tehtävä.)

9. Määritä pienin luonnollinen luku, joka on jaollinen 2009:llä ja jonka numeroiden summa on 2009. (Serbian matematiikkaolympialaiset.)

10. Tasossa on 2009 pistettä, joista jokainen on väritetty joko punaiseksi tai siniseksi. Jokaisessa 1-säteisessä ympyrässä, jonka keskipiste on sininen, on tasan kaksi punaista pistettä. Määritä sinisten pisteiden suurin mahdollinen määrä. (Balkanin matematiikkaolympialaisten juniorisarja.)

11. Kumpi luvuista $\sqrt{2008 + \sqrt{2009}} + \sqrt{2009 + \sqrt{2008}}$ ja $\sqrt{2008 + \sqrt{2008}} + \sqrt{2009 + \sqrt{2009}}$ on suurempi? (Ukrainan matematiikkaolympialaiset, 11. luokan tehtävä.)

12. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n , joille funktion $f(x) = \cos(nx) \cdot \sin\left(\frac{2009x}{n^2}\right)$ jakso on 3π . (Ukrainan matematiikkaolympialaiset, 11. luokan tehtävä.)

13. 2009×2009 yksikköneliöstä koostuvan ruudukon jokaiseen neliöön on kirjoitettu jokin luvuista $1, 2, \dots, 2009$ niin, että joka rivillä ja joka sarakkeessa kukin näistä luvuista esiintyy täsmälleen kerran. Mikä on suurin mahdollinen ruudukon keskimmäisen ruudun ja sitä lähinnä olevan sellaisen ruudun, jossa on numero 1, etäisyys? Kahden ruudun välinen etäisyys on sama

kuin šakki-kuninkaan ruutujen väliseen liikkeeseen tarvitsema vähimmäissiirtomäärä. (Ukrainan matematiikkaolympialaiset, 11. luokan tehtävä.)

14. Onko olemassa polynomia $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, joka täyttää seuraavat ehdot: $|c| \leq 2009$, $|f(34)|$ on alkuluku ja f :llä on kolme kokonaislukunollakohtaa? (Ukrainan matematiikkaolympialaiset, 11. luokan tehtävä.)

15. Kertoma $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$ ja ”kaksoiskertoma”

$$n!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot n, & \text{kun } n \text{ on pariton} \\ 2 \cdot 4 \cdots (n-2) \cdot n, & \text{kun } n \text{ on parillinen,} \end{cases}$$

ovat tunnettuja operaatiota. Määritellään nyt ” k -kertoma” $F_k(n) = n(n-k)(n-2k) \cdots r$, missä $1 \leq r \leq k$ ja $n \equiv r \pmod k$. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut, joille $F_{20}(n) + 2009$ on neliöluku. (Itävallan matematiikkaolympialaiset.)

16. Olkoon a positiivinen luku. Tarkastellaan lukujonoa (a_n) , missä $a_0 = a$ ja $a_n = a_{n-1} + 40^{n!}$, kun $n \geq 1$. Osoita, että jokaisessa tällaisessa jonossa on äärettömän monta 2009:llä jaollista lukua. (Itävallan 40. matematiikkaolympialaiset.)

17. Sanomme, että kaksi aritmeettista jonoa $(a_n) = (a + bn)$ ja $(c_n) = (c + dn)$ ovat olennaisesti eri jonoja, jos ei ole niin, että $a_n = c_{n+p}$ kaikilla tarpeeksi suurilla n ja jollain kokonaisluvulla p . Monellako olennaisesti eri aritmeettisella jonolla on osajonona geometrinen jono, jonka kolmas jäsen on $40 \cdot 2009 = 80360$? (Itävallan 40. matematiikkaolympialaiset.)

18. Käytössä on mielivaltaisen monta postimerkkiä kutakin arvoa 134, 135, 136, $\dots$, 142 ja 143 senttiä. Määritä suurin senttiarvo, jota ei voi koostaa näistä merkeistä. (Itävallan matematiikkaolympialaiset.)

19. Jono (a_n) on ei-vakio aritmeettinen jono ja sen ensimmäinen jäsen $a_1 = 1$. Jonon jäsenet a_2, a_5 ja a_{11} muodostavat geometrisen jonon. Määritä jonon (a_n) 2009 ensimmäisen jäsenen summa. (Slovenian matematiikkaolympialaiset, 12. luokan tehtävä.)

20. Osoita, että $1005^{\ln(121)} = 11^{\ln(1+3+\dots+2009)}$. (Slovenian matematiikkaolympialaiset, 12. luokan tehtävä.)